REGNECENTRALEN
DANSK INSTITUT FOR MATEMATIKMASKINER

DASK - BIBLIOTEKSSPECIFIKATION

SEKVENS-BETEGNELSE
DL 2
side 1/16

DASK - Bibliotekspecifikation, DL 2

Kodet af	PA WH d. 14.9.59
Indkørt af	WH d. 18.9.59
Udgivet d.	25.1.60

Sædvanlige differentialligninger:
Numerisk integration

Indhops-adresser	Udhops-adresser	Indgang	Udgang	Max. ordre-antal	Køretid min.	Køretid max.
OA8	56A8	$C(OAA\ ff) = H, x, y_1 \ldots y_n$	$x + H, y_1 + \delta y_1 \ldots\ldots y_n + \delta y_n \rightarrow 2AA\ ff$ (Fast skridtlængde)	76	Bestemmes i det væsentlige af k-sekvensen; samt for variabel skridtlængdes vedkommende af antallet af skridt a.	
86A8	203A8	$C(OAA\ ff) = H, x, y_1 \ldots y_n$; $C(250A8) = \delta$; $C(252A8) = h_{min}$	$x + H, y_1 + \delta y_1 \ldots\ldots y_n + \delta y_n \rightarrow 2AA\ ff$; $a \cdot 2^{-19} \rightarrow 249A8$ (Var. skr. længde)	241		

Kodelængde	0 - 85 (Fast skridtlængde) 0 - 273 (Variabel skridtlængde)	Undersekvenser	FR1 (OA9) k-sekvens (OAB)
Begyndelsesadresse	lige	Arbejdsceller	i sekvensen, samt OAA ff.
Grundparametre	ingen	Perm. konstanter	C(2039), C(2040v) C(2041)
Programparametre	n A 00		

Grundlag

Ved integrationen benyttes Runge-Kutta's metode, modificeret af S. Gill (se Proc. Cambr. Phil. Soc. 47(1951)).

Differentialligningerne skal være skrevet på formen:

$$\frac{dy1}{dx} = f_1\,(y_1\ldots y_n)$$

$$\frac{dy2}{dx} = f_2\,(y_1\ldots y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dyn}{dx} = f_n\,(y_1\ldots y_n)$$

Bemærk, at funktionerne på højre side kun må være funktioner af y'erne. Forekommer x på højre side, sætter man $x = y_{n+1}$ og tilføjer ligningen

$$\frac{dyn+1}{dx} = 1.$$

Man opgiver y-værdierne svarende til x = xo, og finder y-værdierne svarende til x = xo+h ved følgende formler.

$$q_m^{(o)} = o$$

$$k_m^{(i)} = h \cdot f_m\,(y_1^{(i)}\ldots y_n^{(i)})$$

$$r_m^{(i+1)} = A^{(i)}(k_m^{(i)} - q_m^{(i)}) - B^{(i)}q_m^{(i)} = \begin{cases} A^{(i)}(k_m^{(i)} - q_m^{(i)}) & \text{for } i = 0,1,2 \\ A^{(i)}(k_m^{(i)} - 2q_m^{(i)}) & \text{for } i = 3 \end{cases}$$

$$y_m^{(i+1)} = y_m^{(i)} + r_m^{(i+1)}$$

$$q_m^{(i+1)} = q_m^{(i)} + 2r_m^{(i+1)} - A^{(i)}q_m^{(i)} \quad \text{for } i = 0,1,2$$

idet $i = 0,1,2,3$ og $m = 1,2,\ldots,n$

$y_1^{(4)}\ldots y_n^{(4)}$ er de søgte y-værdier svarende til $x = x_o + h$.

i	$A^{(i)}$	$B^{(i)}$
0	$\frac{1}{2}$	0
1	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0
2	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	0
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Herefter kan man finde y-værdierne svarende til $x = x_0+2h$ udfra værdierne for $x = x_0+h$ o.s.v.

Fejlen δym kan findes således. Først gås eet skridt af længden h; herved fås fås værdien $y1_m$. Derefter gås i stedet to skridt, hver af længden $\frac{1}{2}h$; herned fås værdien $y2_m$. For fejlen på y2m, δym, gælder da:

$$\delta ym \simeq \frac{1}{15}(y2_m - y1_m).$$

(Se f.eks. L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, side 68).

Funktion

Alment

Sekvensen arbejder med flydende, pakkede tal.
Der er to indhop: fast skridtlængde (FS) og variabel skridtlængde (VS).

Ved FS integreres eet skridt frem uden nogen kontrol på fejlen.
Ved VS integreres frem til det ønskede punkt med et vist antal skridt, således at fejlen på hvert enkelt skridt højst er lig en på forhånd opgiven fejl.

I begge tilfælde er virkningen den, at værdierne svarende til $x = x_0$ bliver erstattet af værdierne svarende til $x = x_0+H$; ved FS gås eet skridt af længden H, ved VS gås et antal skridt af længden $h = 2^{-p}.H$ $(p = 0,1,..)$ hvor p bestemmes af den opgivne maksimalfejl.

Nedenfor oplyses om ind- og udgang, undersekvenser og arbejdsceller.
Derefter forklares VS lidt nærmere.

Indgang

Programparameter: nAoo (n er ordenen, d.v.s. det samlede antal ligninger)
C(OAA) = H
C(2AA) = x_0
C(4AAff) = $y_1 \ldots y_n$ (svarende til x_0)
Specielt for VS desuden: C(250A8) = δ. Den maksimale, absolutte fejl (numerisk).
C(252A8) = h_{min}. Den minimale skridtlængde. (numerisk).

SEKNENS-BETEGNELSE
DL 2
side 4/16

Udgang

$C(2AA) = x_o + H$
$C(4AAff) = y_1 \dots y_n$ (svarende til $x_o + H$)

(C(OAA) er uforandret lig H)

Specielt for VS desuden: $C(249A8) = a \cdot 2^{-19}$. a er antal skridt fra x_o til $x_o + H$.

(C(250–252A8) er uforandret).

Bemærk, at sekvensen såvel ved FS som VS har x som indgangs- og udgangsværdi. Skønt x ikke indgår i formlerne (jfr. "Grundlag"), er den altså alligevel taget med; dette er gjort, fordi man som regel har brug for x (f.eks. når man trykker en tabel).

Undersekvenser.

FR1 i OA9.

k-sekvens med indhop OAB. k-sekvensen giver oplysning til DL2 om differentialkvotienterne, idet den skal kodes således, at den beregner værdierne

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f_1(y_1 \dots y_n) \\
k_2 &= h \cdot f_2(y_1 \dots y_n) \\
&\vdots \\
k_n &= h \cdot f_n(y_1 \dots y_n)
\end{aligned}
$$

Disse anbringes i arbejdscellerne (se nedenfor).
k-sekvensen skal retablere de indeksregistre, den benytter.

Arbejdsceller.

	OAA	H	
	2AA	x	
	4 ... 2(n+1)AA	$y_1 \dots y_n$	
	2(n+2) ... 2(2n+1)AA	$k_1 \dots k_n$	
	2(2n+2)...2(3n+1)AA	$q_1 \dots q_n$	
Benyttes ikke ved FS	2(3n+2)...2(4n+1)AA	$y_1 \dots y_n$	Behøver ikke at kendes af brugeren
	2(4n+2)...2(5n+1)AA	$y_{11} \dots y_{1n}$	
	2(5n+2)...2(6n+1)AA	$y_{f1} \dots y_{fn}$	
	2(6n+2)...2(7n+1)AA	$\delta_{y1} \dots \delta_{yn}$	

Nærmere forklaring af VS

Ved VS arbejder sekvensen således. Først prøves, om man kan gå det opgivne skridt H, idet fejlen findes på den måde, der er beskrevet til sidst i "Grundlag". Hvis man ikke kan (d.v.s. hvis fejlen på et af y'erne er større end den opgivne fejl), prøves med den halve skridtlængde. Kan den heller ikke bruges, halveres igen o.s.v.

Når man på denne måde har fundet en tilladelig skridtlængde, adderes fejlene til de fundne y-værdier (hvilket jo giver en bedre tilnærmelse).

Derefter gås et skridt til (hvis man da ikke er færdig) o.s.v. Følgende bemærkninger må gøres.

Det undersøges ved hvert skridt (undtagen ved første skridt), om der er chance for, at den dobbelte skridtlængde kan tillades. Da fejlen er af størrelsesordenen h^5, vil dette - alt andet lige - være tilfældet, hvis ingen af fejlene gange 2^5 overstiger den tilladte fejl δ.

Såfremt der må foretages mere end eet skridt for at nå det opgivne punkt, bliver der brug for at undersøge, om det øjeblikkelige skridt er det sidste. Dette administreres ved hjælp af størrelsen j (se rutediagrammet). Til at begynde med sættes j = o. Efter ethvert forsøg med en for stor skridtlængde sættes j = 1. Når et skridt er gået, og j = 1, undersøges, om næste skridt har chance for at være det sidste. (Dette udtrykkes ikke ved betingelsen $|h| \geq |x_s - x|$, men ved $1.25|h| \geq |x_s - x|$, fordi der er en forholdsvis stor chance for, at man også i dette tilfælde vil kunne bruge skridtlængden $x_s - x$). Hvis næste skridt har chance for at være det sidste, sættes $h = x_s - x$, og j = o. Når et skridt er gået, og j = o, er man færdig.

Der findes indbygget en kontrol på, at skridtlængden ikke bliver urimelig lille. Denne kontrol kan bruges, hvis de numeriske forhold for de pågældende ligninger ikke er afklarede, og der er risiko for, at sekvensen vil blive ved at halvere skridtlængden uden nogensinde at blive færdig. Man opgiver den minimale skridtlængde h_{min} (denne er normalt sat til nul). Da der kun er brug for en grov prøve, undersøges blot eksponenterne for h og h_{min}.

Det bemærkes, at køretiden kan blive meget stor ved VS. Man står sig ved at opgive en rimelig skridtlængde H (for at undgå for mange halveringer), også selv om man i virkeligheden ikke er interesseret i de herved fremkomne mellempunkter.

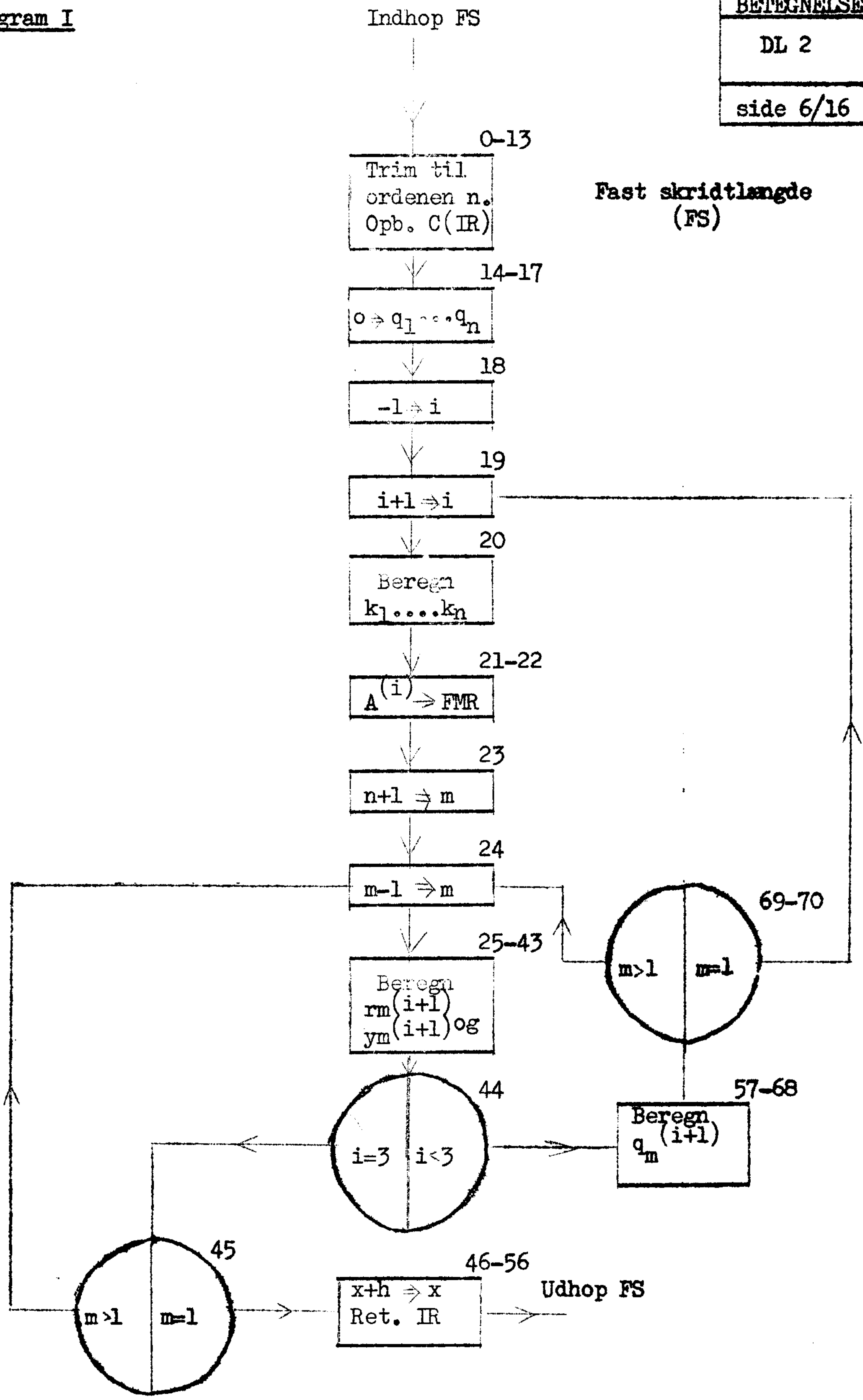
Man bør ikke opgive et for lille δ. Et for lille δ kan bringe sekvensen til et så stort antal skridt, at den akkumulerede fejl bliver større end for et større δ.

Bemærk, at der kun opgives eet δ, fælles for alle y'erne. Såfremt der er vidt forskellige krav til nøjagtighederne af de enkelte y'er, kan man give de enkelte y'er passende skalafaktorer.

SEKVENS-BETEGNELSE
DL 2
side 6/16

Rutediagram I

Fast skridtlængde (FS)

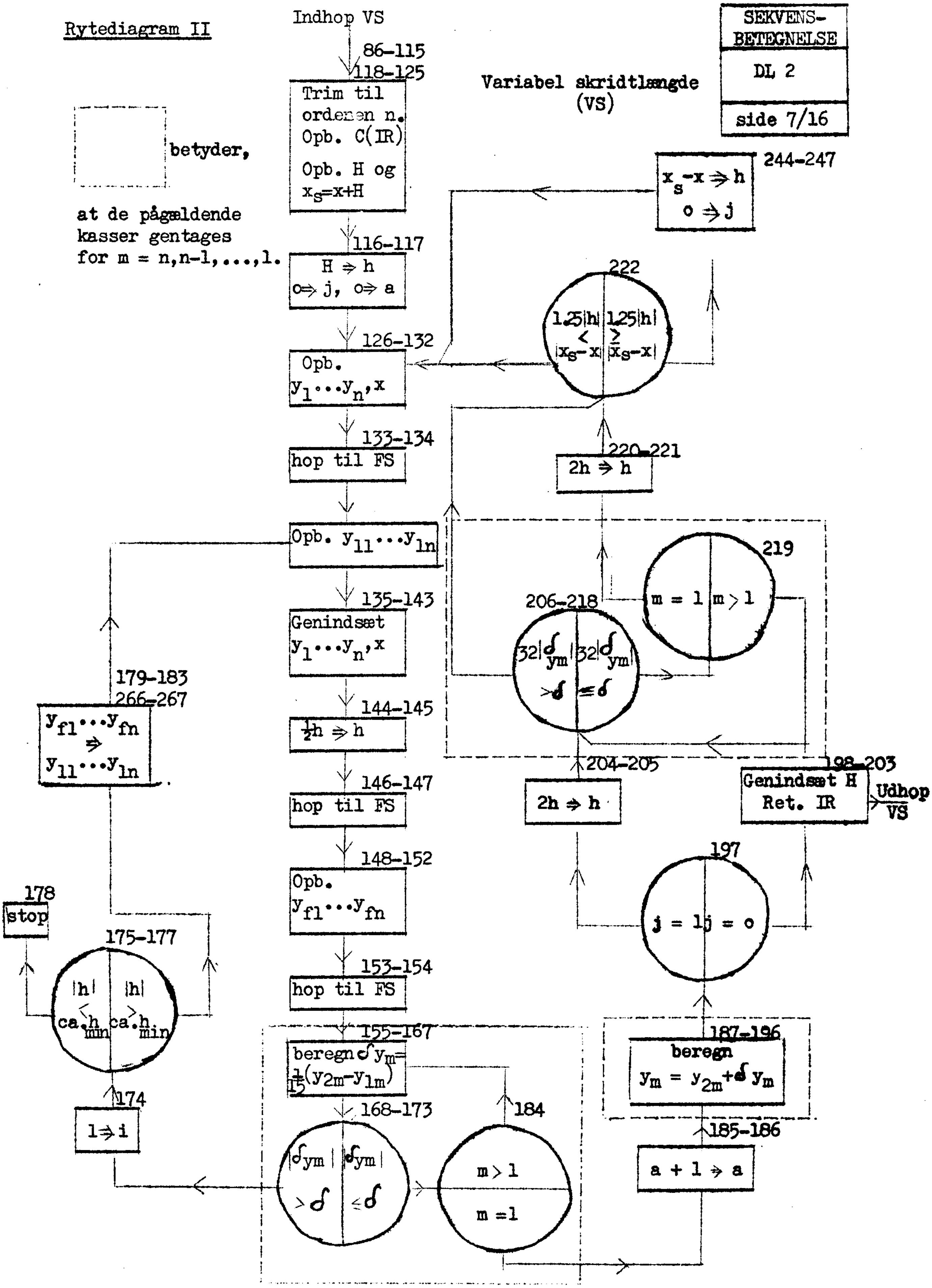


SEKVENS-BETEGNELSE
DL 2
side 7/16

Rytediagram II

Variabel skridtlængde (VS)

[dashed box] betyder, at de pågældende kasser gentages for m = n,n-1,...,1.



<u>Kode</u>

Indhop FS		0	1	D	60	
		1	1	D	20	
		2	14	A8	29	2n → adr
		3	23	A8	29	
		4	39	A8	20	2n + 4AA → adr
		5	35	A8	29	
		6	14	A8	20	
		7	16	A8	29	
		8	25	A8	29	4n + 4AA → adr
		9	64	A8	29	
		10	68	A8	29	
		11	53	A8	74	
		12	54	A8	54	opbevar C(IR)
		13	55	A8	34	
(2)		14	(0)	A	35	2n → IRB
	17 →	15	2046	B	35	-2 + C(IRB) → IRB
(7)		16	(0)	B	48	$0 \Rightarrow q_m$
	15 ←	17	15	A8	33	hop på B
		18	8	A	55	8 → IRC (-1 ⇒ i)
	70 →	19	2046	C	55	-2 + C(IRC) → IRC (i+1 ⇒ i)
		20	0	AB	16	hop til k-sekvens
		21	76	C8	40	$A^{(i)} \rightarrow$ FMR
		22	2031	A	16	
(3)		23	(0)	A	35	2n → IRB (n+1 ⇒ m)
	69 → ,45 →	24	2046	B	35	-2 + C(IRB) → IRB (m-1 ⇒ m)
(8)		25	(0)	B	40	
		26	2026	A	16	$-q_m^{(i)} \rightarrow$ FAR
		27	71	A8	16	
		28	57	A9	16	$-A^{(i)} q_m^{(i)} \rightarrow$ FAR
	32 ←	29	32	A8	53	hop på C ($i < 3$)
		30	2039	A	60	$-2A^{(i)} q_m^{(i)} \rightarrow$ FAR
		31	32	A9	16	
	29 →	32	2016	A	16	C(FAR) → arbc
		33	84	A8	08	

		34	41 A9 16	C(FAR) $\to$ FMD
(5)		35	(0) B 40	$k_m^{(i)} \to$ FAR
		36	2026 A 16	
		37	57 A9 16	$A^{(i)}k_m^{(i)} \to$ FAR
		38	0 A9 16	$r_m^{(i+1)} = A^{(i)}(k_m^{(i)} - q_m^{(i)}) \to$ FMD
		39	4 BA 40	$y_m^{(i)} \to$ FAR
		40	2026 A 16	
		41	2 A9 16	$y_m^{(i+1)} = y_m^{(i)} + r_m^{(i+1)} \to$ FAR & arbc
		42	2016 A 16	
		43	4 BA 08	
	57 ←	44	57 A8 53	hop på C $(i < 3)$
	24 ←	45	24 A8 33	hop på B $(m > 1)$
		46	0 AA 40	h $\to$ FMD
		47	2021 A 16	
		48	2 AA 40	x $\to$ FAR
		49	2026 A 16	
		50	2 A9 16	x+h $\Rightarrow$ x
		51	2016 A 16	
		52	2 AA 08	
(11)		53	(0) A 75	retabler IR
(12)		54	(0) A 55	
(13)		55	(0) A 35	
udhop FS		56	2 D 10	hop ud
	44 →	57	1996 A 43	hop, hvis $r_m^{(i+1)} = 0$
	61 ←	58	61 A8 11	
		59	2039 A 60	$2r_m^{(i+1)} \to$ FMD
		60	1999 A 26	
	58 →	61	84 A8 40	$-A^{(i)}q_m^{(i)} \to$ FAR
		62	2026 A 16	
		63	2 A9 16	$2r_m^{(i+1)} - A^{(i)}q_m^{(i)} \to$ FAR
(9)		64	(0) B 40	$q^{(i)} \to$ FMD
		65	[illegible]	

		66	2	A9	16	
		67	2016	A	16	$q_m^{(i+1)} = q_m^{(i)} + 2r_m^{(i+1)} - A^{(i)} q_m^{(i)} \rightarrow$ arbc
(10)		68	(0)	B	08	
	24 ←	69	24	A8	33	hop på B $(m > 1)$
	19 ←	70	19	A8	10	hop
	→	71	2000	A	41	
	74 ←	72	74	A8	52	
		73	2040	A	41	$-c(FAR) \rightarrow FAR$
	72 →	74	2000	A	08	
	←	75	1	D	10	hop tilbage
		76	B 55555			
		77	B 3FE55			$A^{(3)} = \frac{1}{6}$
		78	B 6D413			
		79	B 401CD			$A^{(2)} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
		80	B 4AFB0			
		81	B 3FFCD			$A^{(1)} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
		82	B 40000			
		83	B 40000			$A^{(0)} = \frac{1}{2}$
		84		A		
		85		A		arbc
indhop VS		86	1	D	60	
		87	134	A8	29	
		88	147	A8	29	n → adr
		89	154	A8	29	
		90	1	D	20	
		91	126	A8	29	
		92	135	A8	29	
		93	148	A8	29	
		94	155	A8	29	2n → adr
		95	179	A8	29	
		96	187	A8	29	
		97	210	A8	29	
		98	1	A	0C	

	99	126 A8 20	
	100	268 A8 20	
	101	129 A8 29	6n + 4AA → adr
	102	139 A8 29	
	103	126 A8 20	
	104	138 A8 29	8n + 4AA → adr
	105	159 A8 29	
	106	126 A8 20	
	107	151 A8 29	10n + 4AA → adr
	108	181 A8 29	
	109	126 A8 20	
	110	167 A8 29	12n + 4AA → adr
	111	191 A8 29	
	112	212 A8 29	
	113	200 A8 74	
	114	201 A8 54	opbevar C(IR)
	115	202 A8 34	
	116	0 A 55	o ⇒ j
	117	249 A8 68	o ⇒ a
	118	0 AA 40	opbevar H
	119	260 A8 08	
	120	2021 A 16	H → FMD
	121	2 AA 40	x → FAR
	122	2026 A 16	
	123	2 A9 16	
	124	2016 A 16	x_s = x+H → arbc
	125	262 A8 08	
(91) 247 → ,243 →	126	(0) A 35	2n → IRB
130 →	127	2046 B 35	-2 + C(IRB) → IRB
	128	4 BA 40	
(101)	129	(0) B 08	opbevar y_m
127 ←	130	127 A8 33	hop på B

55

		131	2 AA 40	opbevar x
		132	264 A8 08	
		133	0 A8 16	hop til FS
(87)	‖	134	(0) A 00	(n)
(92)	267 →	135	(0) A 35	2n → IRB
	141 →	136	2046 B 35	-2 + C(IRB) → IRB
		137	4 BA 40	opbevar yl_m
(104)		138	(0) B 08	
(102)		139	(0) B 40	genindsæt y_m
		140	4 BA 08	
	136 ←	141	136 A8 33	hop på B
		142	264 A8 40	genindsæt x
		143	2 AA 08	
		144	2039 A 61	$\frac{1}{2}h \rightarrow h$
		145	1 AA 26	
		146	0 A8 16	hop til FS
(88)	‖	147	(0) A 00	(n)
(93)		148	(0) A 35	2n → IRB
	152 →	149	2046 B 35	-2 + C(IRB) → IRB
		150	4 BA 40	opbevar yf_m
(107)		151	(0) B 08	
	149 ←	152	149 A8 33	hop på B
		153	0 A8 16	hop til FS
(89)	‖	154	(0) A 00	(n)
(94)		155	(0) A 35	2n → IRB
	184 →	156	2046 B 35	-2 + C(IRB) → IRB
		157	4 BA 40	$y2_m$ → FMD
		158	2021 A 16	
(105)		159	(0) B 40	$- yl_m$ → FAR
		160	2026 A 16	
		161	71 A8 16	
		162	2 A9 16	$y2_m - yl_m$ → FAR
		163	254 A8 40	$\frac{1}{15}$ → AR

		164	2031 A 16	$\frac{1}{15} \rightarrow$ FMR
		165	57 A9 16	
		166	2016 A 16	$\delta y_m \rightarrow$ FAR og arbc
(110)		167	(0) B 08	
		168	269 A8 16	$-\lvert\delta y_m\rvert \rightarrow$ FAR
		169	250 A8 40	$\delta \rightarrow$ FMD
		170	2021 A 16	
		171	2 A9 16	$\delta - \lvert\delta y_m\rvert \rightarrow$ FAR
		172	2000 A 40	hop på + ($\lvert\delta y_m\rvert \leq \delta$)
	184 ←	173	184 A8 11	
		174	1 A 55	$1 \Rightarrow j$
		175	1 AA 60	ca. $(h'' - h''_{min}) \rightarrow$ ARvadr
		176	253 A8 21	
	179 ←	177	179 A8 11	hop på + ($h >$ ca. h_{min})
		178	178 A8 30	stop
(95)	177 →	179	(0) A 35	2n $\rightarrow$ IRB
	266 →	180	2046 B 35	$-2 + C(IRB) \rightarrow$ IRB
(108)		181	(0) B 40	$yf_m \Rightarrow y_m$
		182	4 BA 08	
	266 ←	183	266 A8 10	hop
156 ←	,173 →	184	156 A8 33	hop på B
		185	2041 A 60	$a + 1 \Rightarrow a$
		186	249 A8 26	
(96)		187	(0) A 35	2n $\rightarrow$ IRB
	196 →	188	2046 B 35	$-2 + C(IRB) \rightarrow$ IRB
		189	4 BA 40	$y2_m \rightarrow$ FMD
		190	2021 A 16	
(111)		191	(0) B 40	$\delta y_m \rightarrow$ FAR
		192	2026 A 16	
		193	2 A9 16	
		194	2016 A 16	$y2_m + \delta y_m \Rightarrow y_m$
		195	4 BA 08	

	188 ←	196	188 A8 33	hop på B
	204 ←	197	204 A8 53	hop på C ($j = 1$)
		198	260 A8 40	genindsæt H
		199	0 AA 08	
(113)		200	(0) A 75	
(114)		201	(0) A 55	retabler IR
(115)		202	(0) A 35	
udhop VS		203	2 D 10	hop ud
	197 →	204	2039 A 60	$2h \Rrightarrow h$
		205	1 AA 26	
		206	256 A8 40	$32 \rightarrow$ FMR
		207	2031 A 16	
		208	250 A8 40	$\delta \rightarrow$ FMD
		209	2021 A 16	
(97)		210	(0) A 35	$2n \rightarrow$ IRB
	219 →	211	2046 B 35	$-2 + C(\mathrm{IRB}) \rightarrow$ IRB
(112)		212	(0) B 40	
		213	2026 A 16	$-\lvert\delta y_m\rvert \rightarrow$ FAR
		214	269 A8 16	
		215	57 A9 16	$-32\lvert\delta y_m\rvert + \delta \rightarrow$ FAR
		216	2 A9 16	
		217	2000 A 40	hop på ÷ ($32\lvert\delta y_m\rvert > \delta$)
	222 ←	218	222 A8 51	
	211 ←	219	211 A8 33	hop på B
		220	2039 A 60	$2h \Rrightarrow h$
		221	1 AA 26	
	218 →	222	262 A8 40	$x_s \rightarrow$ FMD
		223	2021 A 16	
		224	2 AA 40	
		225	2026 A 16	$-x \rightarrow$ FAR
		226	71 A8 16	

	227	0 A9 16		
	228	2016 A 16	$x_s - x \rightarrow$ FMD og arbc	
	229	264 A8 08		
	230	1996 A 43		
	231	2036 A 16	$- \lvert x_s - x \rvert \rightarrow$ FMD	
	232	1996 A 08		
	233	258 A8 40	1,25 $\rightarrow$ FMR	
	234	2031 A 16		
	235	0 AA 40		
	236	2026 A 16		
	237	2000 A 42	$\lvert h \rvert \rightarrow$ FAR	
	238	2036 A 16		
	239	2000 A 08		
	240	57 A9 16	$1{,}25 \lvert h \rvert - \lvert x_s - x \rvert \rightarrow$ FAR	
	241	2 A9 16		
	242	2000 A 40		
126 $\leftarrow$	243	126 A8 51	hop på $\div$ $(1{,}25 \lvert h \rvert < \lvert x_s - x \rvert)$	
	244	0 A 55	o $\Rightarrow$ j	
	245	264 A8 40		
	246	0 AA 08	$x_s - x \Rightarrow h$	
126 $\leftarrow$	247	126 A8 10	hop	
	248	2 A 00		
	249	A	a	
	250	B 41893	$\delta = 10^{-3}$	
	251	B 3F775		
	252	A		
	253	A	$h_{min} = o$	
	254	B 44444		
	255	B 3FD44	$\frac{1}{15}$	
	256	B 40000		
	257	B 40600	32	
	258	B 50000		
	259	B 40100	1,25	

	260	A	arbc H
	261	A	
	262	A	arbc x_s
	263	A	
	264	A	arbc x, x_s - x
	265	A	
180 ← ,183 →	266	180 A8 33	hop på B
135 ←	267	135 A8 10	hop
	268	4 AA 00	
→	269	2000 A 43	|C(FAR)| → FAR
272 ←	270	272 A8 52	
	271	2040 A 41	
270 →	272	2000 A 08	
←	273	1 D 10	hop tilbage