REGNECENTRALEN

DANSK INSTITUT FOR MATAMATIKMASKINER

DASK - BIBLIOTEKSSPECIFIKATION

SEKVENS-BETEGNELSE
IG 1
side 1/9

Kodet af P.N. og H.B.H.

Indkørt af P.N. og H.B.H.

Udgivet d. 13.8.1960

$$y = \int_a^b f(x)dx$$

Indhops-adresser	Udhops-adresser	Indgang	Udgang
0A8	107A8	C(0AA) = a C(2AA) = b DASK-tal	$\int_a^b f(x)dx \rightarrow$ FAR C(FMD) og C(FMR) ødelagt

Kodelængde 0 - 113	Undersekvenser FR 1 i 0A9 f(x) - sekv. m. indhop i 0AB
Begyndelsesadresse lige	Arbejdsceller 0AA - 17AA
Grundparametre ingen	Perm. konstanter C(2039), C(2040) C(2041), C(2043)
Programparametre ingen	

OVERSIGT OVER ARBEJDSCELLER IG 1

0AA, 1AA	a
2AA, 3AA	b
4AA, 5AA	Q', I'
6AA	Q''', I'''
7AA	S'''
8AA, 9AA	q
10AA	1 - n (norm. exp.)
11AA	g
12AA, 13AA	J'
14AA	J'''
15AA	P (= 2↑(-n))
16AA, 17AA	S'

Grundlag

Processen baseres paa Simpsons formel (se f. eks. Hildebrand: Introduction to Numerical Analysis, side 73):

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)/6\times[f(a) + 4\times f((a+b)/2) + f(b)] + (b-a)\uparrow 5\ /2880\times f^{IV}(\xi)$$

hvor ξ ligger mellem a og b.

Gennem fortsatte halveringer af intervallet og anvendelse af Simpsons formel paa hvert delinterval faas sukcessive tilnærmelser til integralet ved brug af de vægte, som er vist i følgende skema:

	a 0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	b 1
Abscisse	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
I0 = (b-a)/3×2↑(-1)×	(1				4				1)
I1 = (b-a)/3×2↑(-2)×	(1		4		2		4		1)
I2 = (b-a)/3×2↑(-3)×	(1	4	2	4	2	4	2	4	1)

o.s.v.

Denne proces kan udføres ved følgende iteration, som kun kræver beregning af hver funktionsværdi een gang:

$$J0 = [f(a) + f(b)]/2$$

$$\left.\begin{array}{l} Sn = \sum\limits_{m=0}^{2\uparrow n-1} f[a + (1/2 + m)\times 2\uparrow(-n)\times(b-a)] \\[2ex] In = Jn + Sn\times 2\uparrow(1-n) \\[2ex] J(n+1) = [In + Jn]/4 \end{array}\right\} \quad n = 0,1,2,\text{--}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)/3\times\lim In \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

Fejlen ved den n'te tilnærmelse er givet ved

$$1/16\uparrow n \times (b-a)\uparrow 5/2880 \times f^{IV}(\xi)$$

Tilnærmet kan man derfor regne med, at fejlen reduceres med en faktor 16 for hvert skridt i iterationen.

Funktion

Talrepræsentation

Sekvensen behandler grænserne a og b som DASK-tal, med stop for spild i b - a. Integranden f(x) og integralet behandles som oppakkede flydende tal. Alle melemregningerne udføres med oppakkede flydende tal

Integranden f(x)

Integranden f(x) skal beregnes af en undersekvens med indhop i OAB.

Indgang: C(AR) = x   (DASK-tal)
Udgang: f(x) → FAR   (flydende tal)

Bemærk:
1. Sekvensen kan frit benytte FMD, FMR, AR og MR i mellemregningerne.
2. Sekvensen maa efterlade C(IRC) uændret.

Konvergenskriterit

1. Det normale test. Sekvensen beregner som første approximation I = (f(a) + f(b))/2 og paabegynder derefter iterationen, der sædvanligvis fortsættes indtil to paa hinanden følgende aproximationer stemmer inden for en fastsat relativ tolerance som i sekvensen udtrykkes saaledes:

$$|(In - I(n-1))/In| \leq 2\uparrow(1-v)$$

hvor v findes i sekvensen paa følgende form:

C(113A8) = vA00

Med en valgt værdi af v vil integralet ved skikkelige funktioner faas med en relativ nøjagtighed af

$$2\uparrow(1-v)/15$$

Hvis vi ved b betydende cifre forstaar en relativ nøjagtighed, som er $\leq 0.5 \times {}_{10}{-b}$ (d.v.s. b sikre cifre under alle omstændigheder) faas for de nødvendige værdier af v:

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	5	8	12	15	18	22	25	28	32

I sekvensen er v sat til 27, men kan iøvrigt vælges vilkaarligt ved æn - dring af indholdet i hac 113A8.

2. Nær flydende nul.
Hvis In < 2↑(v-1025) ændres konvergenskravet derhen, at differensen In - I(n-1) skal være flydende nul.

3. Sikkerhedsstop. I visse tilfælde kan man risikere, at iterationerne fortsætter i det uendelige uden at der findes nogen løsning. For at forhindre dette er der i sekvensen indbygget et sikkerhedsstop, hvortil der hoppes, naar

n + 1 > u

hvor n er antallet af iterationer og u er en størrelse, der kan vælges af brugeren. u er lagret paa følgende maade:

C(hac 112A8) = 2↑(-u)

Hvis man ikke foretager sig noget, har u værdie11, og iterationen stopper da, naar J12 er beregnet, d.v.s. naar intervallet b-a er underinddelt i 2↑12 = 4096 underintervaller.

Naar maskinen er stoppet paa denne maade, er C(FMD) = In.

Stopsituationer

Der er mulighed for følgende stop:

KR	ASOP	AR	IRB	IRC	IRD	Aarsag
108A8	108A830	spild	-	1	-	b - a danner spild
108A8	108A830	-	-	0	74A8	Der er udført 11 iterationer
46A9	46A930	-	-	-	-	Stop i FR 1 (s.d.)

Ønskes andre forholdsregler i disse situationer, kan passende hopordrer lagres de paagældende steder.

Det bemærkes, a C(110A8) = 3 flydende pakket samt at C(109A8) = 2A00.

Advarsel. Opmærksomheden henledes paa, at ukritisk brug af den foreliggende sekvens kan føre til helt forkerte resultater ved oscillerende funktioner. For eksempel vil en beregning af

$$\int_{0}^{8\times pi} \cos x \, dx$$

give resultatet 8xpi og ikke 0. Som nogen sikring mod saadanne fejl kan det foreslaas, at man beregner integralet dels i eet stræk fra a til b, dels i to stræk, f. eks. a til a + 4x(b-a)/7 og a + 4x(b-a)/7 til b.

ALGOL-program.

```
procedure Simpson (Integral, v, eps)
          integrand: (f);
          value v, eps; real Integral, v, eps;
          real procedure f;
begin real g, p, t, s, I1, I2, J;
      boolean Gennemløb 1;
      Gennemløb 1:= true; g:= 0; p:= -1;
      S:= f(b); go to A;
B:    Gennemløb 1:= false ;
C:    g:= if p<0 then 0.5 else p/2;
A:    S:= S + f(a + gx(b-a));
      g:= g + p;
      if g>0 then go to A;
      t:= if Gennemløb 1 then 0.5 else
          if p<0 then 2 else 2↑(1+ln(p)/ln(2));
      if Gennemløb 1 then
begin I1:= J:= Sxt;  go to B end;
      I2:= J + Sxt;
      if (I2 - I1)/I2 < 1/2↑v then
begin Integral:= I2x(b-a)/3; go to HOPUD end ;
      J:= (J + I2)/4;
      I1:= I2;
      p:= if p<0 then 0.5 else p/2;
      if p<eps then go to STOP else go to C;
HOP UD:  end Simpson
```

SEKVENS-BETEGNELSE
IG 1
side 7/9

Indhop ->	0	105	A8 54	
	1	106	A8 74	opbevar C(IR)
	2	1	A 55	c:= 1
	3	2	AA 40	
	4	0	AA 01	q:= b - a
	5	8	AA 08	
108 ->	6	108	A8 12	hop paa spild
	7	2	AA 40	
	8	0	AB 16	f(b) -> FAR
	9	11	AA 68	g:= 0
	10	2040	A 60	
	11	15	AA 28	p:= -1
19<-	12	19	A8 10	hop
84 ->	13	0	A 55	c:= 0
90 ->	14	15	AA 60	
	15	1	A 0F	g:= p/2
	16	11	AA 28	
	17	2000	A 48	
	18	2003	A 68	0 -> FAR
34, 12 ->	19	2000	A 40	
	20	16	AA 08	
	21	2003	A 60	opbevar S (1. gang f(b))
	22	7	AA 28	
	23	11	AA 64	
	24	8	AA 0A	f(a + g×q) -> FAR
	25	0	AA 00	
	26	0	AB 16	
	27	16	AA 40	
	28	1996	A 08	
	29	7	AA 60	S + f(a + g×q) -> FAR
	30	1999	A 28	(1. gang f(a) + f(b))
	31	2	A9 16	
	32	15	AA 60	
	33	11	AA 26	g:= g + p
19<-	34	19	A8 11	hop hvis g≥0 (til summation)
	35	2039	A 61	-1 -> ARvadr.
43<-	36	43	A8 53	hop "første gang"
	37	15	AA 60	
42<-	38	42	A8 51	hop hvis p<0
	39	10	AA 0E	

SEKVENS-BETEGNELSE
IG 1
side 8/9

```
               40    10 AA 61   1 - n - ARvadr.
43 <-          41    43 A8 10   hop
38 ->          42  2039 A  60   1 - ARvadr.
36, 41 ->      43    32 A9 16   Sx2⅄(1-n) - FAR
76 <-          44    76 A8 53   hop "første gang"
               45    12 AA 40
               46  1996 A  08
               47    14 AA 60   In -> FMD
               48  1999 A  28
               49     0 A9 16   In = Jn + 2⅄(1-n)xS -> FMD
               50     4 AA 41
               51  2036 A  16
               52  2000 A  08   -I(n-1) -> FAR
               53     6 AA 60
               54  2003 A  28
               55  1996 A  40
               56     4 AA 08
               57  1999 A  60   In:= Jn + Sx2⅄(1-n)
               58     6 AA 28
               59     2 A9 16   d = In - I(n-1) -> FAR
               60     6 AA 60
               61   113 A8 21   In" + 1024 - v -> AR
66 <-          62    66 A8 51   hop hvis In nær flydende nul
               63  2003 A  21   I" - v - d" -> AR
91 <-          64    91 A8 11   hop hvis d" - In" ≤ -v (konv. i orden)
68 <-          65    68 A8 10   hop til ny iteration
62 ->          66  2000 A  43
91 <-          67    91 A8 11   hop hvis d = 0 (konv. i orden)
66 ->          68    12 AA 40
               69  2000 A  08
               70    14 AA 60   In -> FAR
               71  2003 A  28
               72     2 A9 16   In + Jn -> FAR
               73   109 A8 61
               74    32 A9 16   (In + Jn)/4 -> FAR
80 <-          75    80 A8 10   hop
44 ->          76  2000 A  40
               77     4 AA 08
               78  2003 A  60   I0:= (f(a)+f(b))/2
               79     6 AA 28
```

SEKVENS-BETEGNELSE
IG 1
side 9/9

```
75 ->          80     2000 A  40 ]
               81       12 AA 08 } I(n+1):=(In+Jn)/4
               82     2003 A  60 ]
               83       14 AA 28 ]
13<-           84       13 A8 53   hop "første gang"
               85       15 AA 60 ]
               86        1 A  0F } p:= p/2
               87       15 AA 28 ]
               88      112 A8 21 ]
108<-          89      108 A8 51 } hop hvis p<2↑(-u)
14<-           90       14 A8 10   hop til ny iteration
67, 64 ->      91        8 AA 40 ]
               92     2003 A  0E ]
               93     2000 A  08 ]
               94     2003 A  61 } q = b - a ->FAR
               95     2043 A  20 ]
               96     2003 A  28 ]
               97     1996 A  40 ]
               98     2004 A  08 ]
               99     1999 A  60 } In ->FMR
              100     2007 A  28 ]
              101      110 A8 40 ]
              102     2021 A  16 } 3 ->FMD
              103       57 A9 16 ]  b
              104       50 A9 16 } ∫f(x)dx = q×In/3 - FAR
(0)           105      (0) A  55 ]  a
(1)           106      (0) A  75 } retabler IR
Udhop<-       107        1 D  10   hop ud
6, 89 ->      108      108 A8 30   alarmstop
              109        2 A  00   2×2↑(-11)
              110     1536 A  00 ]
              111     1026 A  00 } 3 flydende pakket
              112        1 A  00   2↑(-u)
              113       27 A  00   v
```