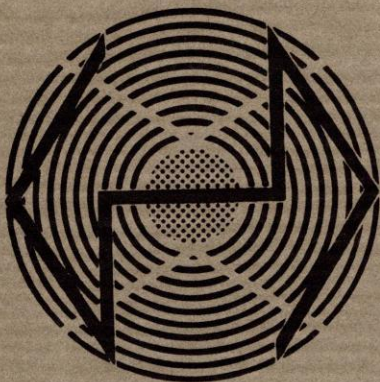




REGNECENTRALEN

SCANDINAVIAN INFORMATION PROCESSING SYSTEMS

RC SYSTEM LIBRARY: FALKONERALLE 1 · DK-2000 COPENHAGEN F

RCSL No : 31-D287

Edition : September 1973

Author : Preben Olesen

Title : Linear Programming (lp)

Keywords : RC 4000, Software, Optimization, Algol Program, lp

Abstract : The program optimizes a linear function regarding a given set of linear constraints. Different kinds of sensitivity analysis may be performed on the data material. Danish edition. 25 pages.

Indholdsfortegnelse

	side
1. Indledning	1
1.1. Standardform for lp-opgaven	3
1.2. Omformning af opgaven til standardform	4
1.3. Løsningsmetoden	5
1.4. Dualitet	7
1.5. Sensitivitetsanalyse	10
2. Inddata	12
2.1. Datasyntaks	12
2.2. Datastyring	14
2.3. Navngivning af rækker og søjler	16
2.4. Angivelse af opgavens talværdier	18
2.5. Særlig udvælgelse af costranging koefficienter	20
2.6. Særlig udvælgelse af rhs-ranging koefficienter	20
2.7. Afslutning paa data	20
3. Uddataeksempel	21
4. Kørselsvejledning	22
5. Litteraturhenvisninger	23

1. Indledning

Lineær programmering (lp) bruges til løsning af opgaver, hvor det drejer sig om at minimere eller maksimere en størrelse, f.eks. at minimere en pris paa en færdigvare eller at maksimere fortjenesten paa den, under forudsætning af, at en række betingelser er opfyldt, saasom kapacitetsbegrænsninger, tekniske specifikationer, kapital bindinger o.lign.

Opgaver af denne art optræder hyppigt inden for handel, industri og forskning.

For at kunne bruge lp-tekniken, skal opgaverne kunne formuleres saadan, at der eksisterer et antal lineære betingelser mellem de enkelte variable. En god introduktion til lp, dets brug og aspekter findes iøvrigt i [6].

Eks. 1

Lederne af en industrivirksomhed skal i følge en afsluttet kontrakt levere et givet antal af 3 færdigvarer. Derfor ønsker de at starte en produktion, der skal resultere i mindst det givne antal, idet der vil være gode afsætningsmuligheder for et evt overskud af færdigvarerne. Til produktionen af disse skal benyttes 2 raavarer, som kun kan fremskaffes i en begrænset mængde. Fabrikationen af de 3 færdigvarer kan foregaa paa 3 forskellige produktionsmaader, d.v.s. ved 3 forskellige processer.

Fra tidligere produktioner af lignende karakter ved man, hvor meget hver enkelt af de 3 processer fremstiller af de 3 færdigvarer, og hvor meget de forbruger af de 2 raavarer.

Opgaven lyder nu paa at minimere omkostningerne ved produktionen af færdigvarerne. Man tænker sig omkostningerne ved hver proces givet.

Herefter kan man opstille følgende skema.

	proces 1	proces 2	proces 3	krav
omkostninger	19.5	30	25	minimum
forbrug af raavare 1	3	5	4	≤ 200
- - - 2	3	2	1	≤ 210
produktion af færdigvare 1	2	2	0	≥ 50
- - - 2	2	2	1	≥ 30
- - - 3	0	1	2	≥ 60

Af skemaet ser man, at omkostningerne er 19.5, 30 og 25 for et gennemløb af henholdsvis proces 1, 2 og 3. Det fremgaar endvidere, at der skal produceres henholdsvis 50, 30 og 60 enheder af de 3 færdigvarer, samt at forbruget af raavarer ikke maa overstige henholdsvis 200 og 210.

Ligeledes fremgaar det, at f.eks. et gennemløb af proces 3 producerer 0, 1 og 2 enheder af færdigvarerne, samt forbruger 4 og 1 enheder af raavare 1 og 2.

Herved er problemet formuleret som en lp-opgave. Vi skal senere opstille data til edb-programmet og lade dette løse opgaven.

1.2. Standardform for lp-opgaven

Naar en opgave er formuleret, opstiller man dens matematiske model. Lp-opgaver er karakteriseret ved, at denne model har formen

minimer den lineære kriteriefunktion i de n variable x

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

under betingelse af, at følgende m lineære krav er opfyldt

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i \quad i = 1, m_1$$

$$a_{i2} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \geq b_i \quad i = m_1 + 1, m_2$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i \quad i = m_2 + 1, m$$

samt

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, n$$

$$b_i \geq 0 \quad i = 1, m$$

1.2. Omformning af opgaven til standardform

Hvis den oprindelige model ikke opfylder standardformen, omformes modellen paa følgende maade.

Saaframt opgaven lyder paa at maksimere kriteriefunktionen, ganges denne med (-1) , hvilket fører maksimumopgaven over i en minimumopgave.

Er betingelsen $b_i \geq 0$, $i = 1, m$ ikke opfyldt, ganges den tilsvarende betingelsesligning igennem med (-1) , saaledes at kravet er opfyldt. Husk at dette medfører, at eventuelle ulighedstegn vendes.

Er betingelsen $x_i \geq 0$, $i = 1, n$ ikke nødvendigvis opfyldt, omskriver man variabelen, som differensen mellem to ikke negative variable, d.v.s. $x_i = x_{i1} - x_{i2}$, hvor x_{i1} og x_{i2} sikkert er større end eller lig nul.

Endelig skal opgavens opstilles, saadan at kriteriefunktionen kommer først (række nr. 0), dernæst betingelser med mindre end eller lig med (rækkerne 1 til m_1), saa betingelserne større end eller lig med (rækkerne m_1+1 til m_2) og til sidst betingelserne lig med (rækkerne $m_2 + 1$ til m).

For eks 1 ser standardformen ud som vist underneden.

$$\text{min. } 19.5x_1 + 30x_2 + 25x_3$$

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 200$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 210$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 50$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 30$$

$$x_2 + 2x_3 \geq 60$$

1.3. Løsningsmetoden

Programmet løser lp-opgaverne efter Dantzig's modificerede simplexmetode [4]. I [1] findes beskrevet en algoritme, der anvender metoden, og i [2] og [3] er senere angivet forbedringer. Denne algoritme med forbedringer og sensitivitetsanalyser er implementeret til RC 4000 af Svend Kræmer.

Den modificerede simplex metode bygger paa en metode til iterativ løsning af ligningssystemer, idet den omformer de lineære betingelser til ligninger ved indførsel af saakaldte slackvariable. Betingelser af formen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

omdannes til en ligning ved addition af en slackvariabel $x_{n+1} \geq 0$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

Analogt omformes

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

ved subtraktion af en slackvariabel $x_{n+1} \geq 0$ til

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$$

Det oprindelige system af betingelser er hermed overført i et ligningssystem med m ligninger og $n+m_2$ variable. Dette skal løses paa en saadan maade, at kriteriefunktionen er minimal. Det sæt af variable x , der er større end nul, og som minimerer kriteriefunktionen, udgør basisløsningen. Paa den anden side siger man, at basis udgøres af disse variable.

Til et ligningssystem med m ligninger og n variable findes der, hvis de m ligninger er lineært uafhængige ingen løsning for $n < m$ og een løsning for $n = m$. Er $n > m$ er det nødvendigt at undersøge højst $\binom{n}{m} = n!/(m! * (n - m)!)$ forskellige kombinationer af de n variable for at finde den, der minimerer kriteriefunktionen.

For en lp-opgave med n variable og m betingelsesligninger vil den modificerede simplexmetode, som er en iterativ metode, konvergere efter et passende (endeligt) antal iterationer, sædvanligvis mellem m til $2m$, og tilsyneladende højst $3m$. Saaframt $n \ll m$ vil det være hurtigere at løse det duale problem (se afsnit 1.4).

Løsningsmetoden forudsætter ikke noget om

- , at betingelsesligninger ikke maa være lineært afhængige.
- , at betingelsesligningerne ikke maa være 'inconsistente',
d.v.s. at to eller flere ligninger er i strid med hinanden,
f.eks. $x_1 + x_2 = 4$ og $x_1 + x_2 = 2$, saaledes at der ingen løsning er.
- , eller at problemet ikke er løseligt i ikke negative variable.

Der vil i alle tilfælde komme en fornuftig reaktion, saafremt der er noget galt med data. Metoden vil endvidere ofte overleve, at basis undervejs degenererer, d.v.s. at basisvariable bliver lig nul.

1.4. Dualitet

Det duale problem til et oprindeligt af formen

$$\begin{array}{llll} \min & c_1 x_1 + c_2 x_2 & + c_n x_n & \\ & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + & + a_{1n} x_n \leq b_1 & i = 1, m_1 \\ & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + & + a_{1n} x_n \geq b_1 & i = m_1 + 1, m_2 \\ & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + & + a_{1n} x_n = b_1 & i = m_2 + 1, m \end{array}$$

dannes paa følgende maade.

Først omformes alle betingelsesligninger til formen større end eller lig med. En betingelsesligning, der ikke indeholder ulighedstegn kan omformes til to, der indeholder ulighedstegn paa følgende maade.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

omformes til

$$\begin{array}{ll} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \end{array}$$

Herefter har man

$$\begin{array}{llll} \min & c_1 x_1 + c_2 x_2 & + c_n x_n & \\ & -a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - & - a_{1n} x_n \geq -b_1 & i = 1, m_1 \\ & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + & + a_{1n} x_n \geq b_1 & i = m_1 + 1, m_2 \\ & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + & + a_{1n} x_n \geq b_1 & \\ & -a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - & - a_{1n} x_n \geq -b_1 & i = m_2 + 1, m \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\}$$

eller skrevet paa matriksform

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \geq g_i & i = 1, m \end{array}$$

hvor g_i svarer til b_i og d_{ij} til a_{ij} paa nær eventuelle fortegn.

Det duale problem fremkommer herved, som

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{2m-m_2} g_i y_i \\ & \sum_{i=1}^{2m-m_2} d_{ji} y_i \leq c_j \quad j = 1, n \end{aligned}$$

Det skal bemærkes, at det duale problem til et dualt problem svarer til det oprindelige, samt at minimum af det oprindelige er lig maksimum af det duale.

Er man interesseret i at løse den duale opgave, kan man, efter at problemet er formuleret, omforme det til lp-standardformen og derefter lade edb-programmet løse opgaverne.

Eks

Tidligere skitseredes opgaven (eks. 1).

$$\begin{aligned} \min \quad & 19.5x_1 + 30x_2 + 25x_3 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 200 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 210 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 50 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 30 \\ & x_2 + 2x_3 \geq 60 \end{aligned}$$

For at opstille det duale problem, omformes eksemplet først til

$$\begin{aligned} \min \quad & 19.5x_1 + 30x_2 + 25x_3 \\ & -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 \geq -200 \\ & -3x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -210 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 50 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 30 \\ & x_2 + 2x_3 \geq 60 \end{aligned}$$

og herefter til det duale problem

$$\text{maks } -200y_1 - 210y_2 + 50y_3 + 30y_4 + 60y_5$$

$$-3y_1 - 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 \leq 19.5$$

$$-5y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 \leq 30$$

$$-4y_1 - y_2 + y_4 + 2y_5 \leq 25$$

Skal man løse det oprindelige problem, kan man samtidig faa udskrevet de duale basisvariable, idet disse er udregnet under løsningen ved simplexmetoden.

Ofte fremkommer det duale problem ved en anden formulering af opgaven end ved det oprindelige problem.

Eksempel

Har man den samme produktionsopgave som ved eks 1, men er opgaven nu at maksimere fortjenesten ved produktionen, naar man ikke kender priserne paa færdigvarerne og raavarerne, samtidig med, at omkostningen paa de 3 produktionsprocesser ikke maa overstige de fastsatte omkostninger, medfører det, at opgaven nu lyder maksimer fortjenesten, der er lig med indtægter ved salg af færdigvarer minus udgifter ved køb af raavarer

$$\text{maks } -200y_1 - 210y_2 + 50y_3 + 30y_4 + 60y_5$$

$$-3y_1 - 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 \leq 19.5$$

$$-5y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 \leq 30$$

$$-4y_1 - y_2 + y_4 + 2y_5 \leq 25$$

De 3 betingelsesligninger kræver, som det ses, at indtægter minus udgifter ikke maa overstige de fastsatte omkostninger ved produktionen af hver af de 3 færdigvarer. Det ses endvidere, at dette netop er det duale problem til det oprindelige.

1.5. Sensitivitetsanalyse

I et lp-problem skal man specificere værdierne af b- og c-koefficienterne, hvor b-koefficienterne er kravene i de lineære betingelser og c-koefficienterne er konstanterne i kriteriefunktionen. Paa basis af disse værdier er det som nævnt muligt at bestemme en optimal løsning. Det er imidlertid ofte interessant at se, hvor følsom den fundne løsning er over for ændringer i disse koefficienters værdier. Disse er nemlig hyppigt kun kendt paa nær en vis usikkerhed, idet de eksempelvis er fundet ved forsøg eller prognoser. Evt. gør økonomiske forhold, at de ændrer sig med tiden. Det er undersøgelser af afhængigheden mellem variation i data og løsning, man kalder sensitivitetsanalyser.

Programmet kan udføre følgende sensitivitetsanalyser

1. 'Skyggepriser'

Giver information om, hvor meget kriteriefunktionen ændrer sig, naar b-koefficienterne ændres med en ad gangen, medens resten fastholdes. Skyggepriserne svarer til de duale variable.

2. 'Relative cost'

Giver information om, hvor meget kriteriefunktionen ændrer sig, naar en enhed af en ikke basisvariabel tvinges ind i løsningen.

3. 'Cost ranging'

Giver information om, indenfor hvilket interval c-koefficienterne for de enkelte variable (enkeltvis) kan variere, uden at basisvariable gaar ud af løsningen, hvorved nye kommer ind. Programmet giver oplysning om c-koefficienternes værdiinterval og hvilke variable, der gaar ud af og kommer ind i basis ved intervalendepunkterne. Saaframt en slackvariabel kommer ind eller gaar ud, d.v.s. en ulighed i betingelserne er henholdsvis ikke gældende eller gældende, angiver programmet rækkeidentiteten paa betingelsen.

Er kriteriefunktionen ved intervalendepunkterne ubegrænset, er det ikke muligt at bestemme den basisvariabel, der skal ind. I dette tilfælde angiver programmet et nul.

4. 'Right-hand side ranging'

Giver information om, inden for hvilket interval b-koefficienterne kan variere, uden at basisvariable gaar ud af løsningen, og nye kommer ind. Programmet giver oplysning om b-koefficienternes værdiinterval og hvilke variable, der gaar ud af og kommer ind i basis ved intervalendepunkterne. Saaframt en slackvariabel kommer ind eller gaar ud, d.v.s. en ulighed i betingelserne er henholdsvis ikke gældende og gældende, angives rækkeidentiteten paa betingelsen.

2. Inddata

Inddata opstilles efter de i det følgende angivne konventioner. Inddata kan kort skitseret opdeles i data til definition af opgaver, navngivning af inddatamaterialet samt angivelse af selve talmaterialet.

2.1. Datasyntaks

Hver gruppe af data, der angives, skal starte med en identifikation bestaaende af et < efterfulgt af fem bogstaver og et kolon, som f.eks. <hoved: . Derefter kommer data, der afsluttes med et >.

Selve datamaterialet maa bestaa af op til 25 linier. Saafremt der inden for den paagældende datagruppe er behov for at angive flere linier fortsættes med samme identifikation og nye datalinier, der igen afsluttes med et > . En datagruppe kan saaledes opdeles i klumper, der hver kan indeholde op til 25 linier.

Skal der angives flere data ved siden af hinanden paa samme linie anvendes enten tabulator eller skraastreg som skilletegn. Skraastregen er især anvendelig ved terminalkørsel.

Saafremt samme data skal angives under hinanden i samme søjle, kan lighedstegn anvendes som gentagelsestegn. Lighedstegn maa ikke forekomme i første linie, efter datagruppens identifikation, idet det da ikke henfører til noget andet.

Der skelnes ikke mellem store og smaa bogstaver i inddata.

Kontrolsummer kan anføres efter > i hver datagruppe. Der kan kun angives kontrolsummer under søjler indeholdende tal. Kontrolsummen er summen af de numeriske værdier, idet eventuelle gentagelsestegn ikke tælles med. Kontrolsummen tabuleres ud under den søjle, hvor den hører til.

Eks

For eks 1 ser dataopstillingen ud som vist paa følgende side.

I dette tilfælde er kriteriefunktionen benævnt omkos og betingelsesligningerne raa1, raa2, vare1, vare2 og vare3. De variable er døbt pro1, pro2 og pro3.

<hoved:
 optimering af produktionsopgave
 a/s regnecentralen
 falkoner alle 1 2000 f
 tlf (01)105366
 att. søren henckel

>
 <sidea:
 omkostningsminimering sag 7.29

>
 <styre:
 3 ; antal variable
 2 ; antal betingelser af formen $ax \leq b$
 3 ; antal - - - $ax \geq b$
 0 ; antal - - - $ax = b$
 ja ; skyggepriser eller duale variable
 ja ; relative costs
 ja ; cost ranging
 ja ; rhs ranging
 1 ; layout 1 eller 2
 nej ; uddata for hver iteration

>
 <rækid: ; navngivning af rækker/betingelsesligninger
 omkos
 raa1
 raa2
 vare1
 vare2
 vare3

>
 <søjid: ; navngivning af søjler/variable
 pro1
 pro2
 pro3
 >
 <matri: ; angivelse af c og a-matricernes talværdier

omkos	pro1	19.5	
=	pro2	30	
=	pro3	25	
vare1	pro1	2	
=	pro2	2	
vare2	pro1	2	
=	pro2	2	
=	pro3	1	
vare3	pro2	1	
=	pro3	2	
>		86.5	; kontrolsum

<matri:			
raa1	pro1	3	
=	pro2	5	
=	pro3	4	
raa2	pro1	3	
=	pro2	2	
=	pro3	1	
>		18	

<bsøj1:			; angivelse af højresidens talværdier
vare1	50		
vare2	30		
vare3	60		
raa1	200		
raa2	210		
>		550	

>end

2.2. Datastyring

Data starter altid med følgende tre datagrupper til definition af opgaven.

< hoved:

- - - -

- - - -

>

< sidea:

- - - -

>

< styre:

; antal variable x

; antal betingelser af formen $ax \leq b$

; antal - - - $ax \geq b$

; antal - - - $ax = b$

; skyggepriser eller duale variable ja/nej

; relative costs ja/nej

; cost ranging ja/nej

; rhs ranging ja/nej

; layout 1 eller 2

; uddata for hver iteration ja/nej

>

Disse tre datagrupper skal altid angives.

I første gruppe <hoved: angives en tekst paa maks 5 linier a 70 tegn. Denne tekst udskrives paa uddatas første side.

I anden gruppe <sidea: angives en tekst paa 1 linie indeholdende maks 70 tegn. Denne linie udskrives øverst paa hver side uddata.

I datagruppen < styre: angives de parametre, der styrer kørslen. Det er meget væsentligt, at disse angives korrekt. Derfor bør problemet formuleres paa standardformen,

$$\begin{array}{ll}
 \min c_1 x_1 + c_2 x_2 + & + c_n x_n \\
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + & + a_{1n} x_n \leq b_1 \quad i = 1, m_1 \\
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + & + a_{1n} x_n \geq b_1 \quad i = m_1 + 1, m_2 \\
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + & + a_{1n} x_n = b_1 \quad i = m_2 + 1, m
 \end{array}$$

saaledes at man nemt kan overskue styreparametrene og få angivet data i den rigtige rækkefølge.

Med hensyn til layout kan der vælges mellem 2 layouts. Layout 1 spænder mellem -9.9999_{10}^9 og 9.9999_{10}^9 . Talværdier uden for dette interval betragtes som uendelige. Layout 2 spænder mellem -9.999_{10}^{99} og 9.999_{10}^{99} , og tal uden for intervallet betragtes også her som uendeligt.

2.3. Navngivning af rækker og søjler

Disse data kan eventuelt udelades, idet der er indlagt standardnavne, der i saa fald benyttes.

For rækkerne bestaar standardnavnene af et r efterfulgt af rækkenummeret.

række nr	navn	
0	rcost	(kriterie funktionen)
1	r1	betingelser af formen $ax \leq b$
2	r2	
.	.	
.	.	
m_1	rm_1	
$m_1 + 1$	$rm_1 + 1$	betingelser af formen $ax \geq b$
.	.	
.	.	
m_2	rm_2	
$m_2 + 1$	$rm_2 + 1$	betingelser af formen $ax = b$
.	.	
.	.	
m	rm	

Saafrømt man selv ønsker at angive rækkenavne, altsaa at navngive kriteriefunktionen og betingelsesligningerne, kan man benytte navne paa maks. 5 tegn. Disse angives i datagruppen <rækid: begyndende med kriteriefunktionen og derefter betingelsesligningerne i den ovenfor nævnte rækkefølge. Det er meget væsentligt, at dette rækkefølgekrav overholdes.

For eks 1 faas

<rækid:

omkos

raa1

raa2

vare1

vare2

vare3

>

Saafrømt man ikke selv ønsker at angive variabelnavne eller tilsvarende søjlenavne, indeholder programmet følgende standardnavne

søjle nr	navn
1	s1
2	s2
.	.
.	.
n	sn

Ønsker man derimod selv at angive søjlenavne, kan man ogsaa her benytte navne paa maks 5 tegn.

Disse angives i datagruppen < søjid: begyndende med søjle eller variable 1 og sluttende med n.

For eks 1 faas

```
<søjid:
pro1
pro2
pro3
>
```

Ofte vil man for visse opgaver kun benytte en passende delmængde af et totalt problem. Dette kan hensigtsmæssigt gøres ved at opstille kriteriefunktionen og betingelsesligningerne for det totale problem og faa dette data materiale hullet op eller eventuelt lagt ned i en database, hvorfra det kan hentes frem via et special program.

Naar man saa ønsker at køre en delopgave, defineres denne ved sine styreparametre og række- søjlenavne. Det gælder, at det antal rækker, der er angivet i <styre: skal være med det antal navne, der er specificeret i <rækid: plus række 0, der er kriteriefunktionen. Tilsvarende gælder det, at antal variable skal være lig med antal søjlenavne. Ved paa denne maade at angive antal rækker og søjle samt navnene paa dem, og lade denne styring virke paa talmaterialet, kan man faa pillet de variable og betingelsesligninger, som man ønsker at regne paa, ud af det totale materiale.

2.4. Angivelse af opgavens talværdier

Som standard er alle tal i matricen $a_{ij} = 0$ og $c_j = 0$ for $i = 1, m$ og $j = 1, n$. Derfor angives kun tal forskellig fra nul, og de opstilles i en vilkaarlig rækkefølge i datagruppen `<matri:` ved række- og søjlenavn og værdi. Række- og søjlenavnene skal være mellem de tidligere angivne (evt. standardnavnene). Det er, som nævnt tidligere, tilladt at angive et større datamateriale end svarende til række- og søjlenavnene, idet dog kun det materiale, der svarer til disse navne, tages i regning.

Eks

For eks 1 faas

<code><matri:</code>	<code><matri:</code>
omkos pro1 19.5	omkos/pro1/19.5
= pro2 30	=/pro2/30
= pro3 25	pro3/25
vare1 pro1 2	vare1/pro1/2
= pro2 2	=/pro2/2
vare2 pro1 2	vare2/pro1/2
= pro2 2	=/pro2/2
= pro3 1	=/pro3/1
vare3 pro2 1	vare3/pro2/1
= pro3 2	=/pro3/2
>	>
86.5	//86.5
<code><matri:</code>	<code><matri:</code>
raa1 pro1 3	raa1/pro1/3
= pro2 5	=/pro2/5
= pro3 4	=/pro3/4
raa2 pro1 3	raa2/pro1/3
= pro2 2	=/pro2/2
= pro3 1	=/pro3/1
>	>
18	//18

, idet der er vist de to muligheder for skilletegn (tabulator og skraastreg).

Som standard er alle højresidekoefficienterne $b_i = 0$, $i = 1, m$.
 Det er altsaa kun nødvendigt at angive værdier forskellig fra nul.
 Man skal i øvrigt huske, at lp-standardformen forlanger $b_i \geq 0$,
 $i = 1, m$. (se side 4)

Koefficienterne angives i vilkaarlig rækkefølge i datagruppen
 <bsøj1: ved rækkenavn og værdi. Ogsaa her er det tilladt at angive,
 som her antydte, et større datamateriale, idet kun værdierne svaren-
 de til de angivne rækkenavne er gældende.

Eks

For eks 1 faas

<bsøj1:		<bsøj1:
vare1	50	vare1/50
vare2	30	vare2/30
vare3	60	vare3/60
raa1	200	raa1/200
raa2	210	raa2/210
>		>
	550	/550

, idet der er vist de to muligheder for skilletegn (tabulator og skraastreg).

2.5. Særlig udvælgelse af costranging koefficienter

Ønsker man en costranging analyse, skal der svares ja i styreparametrene. Herved faar man en analyse for alle c-koefficienterne. Er man kun interesseret i en analyse af, hvor meget visse c-koefficienter kan variere, uden at basis ændres, angives i datagruppen < constr: søjlenavnene svarende til koefficienterne.

Eks

Er man for eks 1 kun interesseret i at undersøge c_1 og c_3 , angives

```
<constr:
pro1
pro3
>
```

2.6. Særlig udvælgelse af rhs-ranging koefficienter

Ønsker man en rhs-ranging analyse, skal der svares ja i styreparametrene. Er man imidlertid ogsaa her kun interesseret i, hvor meget visse b_i -koefficienter kan variere, uden at basis ændres, angives i datagruppen <rhsra: rækkenavnene svarende til koefficienterne

Eks

Ønsker man for eks. 1 kun at undersøge b_1 og b_4 , angives

```
<rhsra:
raa1
vare2
>
```

2.7. Afslutning af data-materialet

```
Hele datamaterialet afsluttes med et
>end
```


Uddata for eksempel 1 er vist herunder. Det skal bemærkes, at hvor der optræder en slackvariabel i uddata, er denne angivet ved rækkenavnet til den betingelsesligning, hvor den er udført.

omkostningsminimering sag 7.29, side 1

lp løsning, minimum af kriteriefunktionen= 1.1875' 3

variable i basis:

nr	værdi	
2	2.5000'	1
3	1.7500'	1
RAA1	5.0000'	0
RAA2	1.4250'	2
VARE2	3.7500'	1

omkostningsminimering sag 7.29, side 2

skyggepriser/duale variable:

række	værdi
RAA1	0.0000' 0
RAA2	0.0000' 0
VARE1	8.7500' 0
VARE2	0.0000' 0
VARE3	1.2500' 1

omkostningsminimering sag 7.29, side 3

relative costs:

variabel	relative cost
1	2.0000' 0
2	0.0000' 0
3	0.0000' 0

omkostningsminimering sag 7.29, side 4

cost ranging:

søjle	basis	aktuel	nedre	variabel	øvre	variabel
	status	værdi	grænse	ind	grænse	ind
PRO1	nej	1.9500' 1	1.7500' 1	1	ubegrænset	0
PRO2	ja	3.0000' 1	1.2500' 1	VARE1	RAA1	3.2000' 1
PRO3	ja	2.5000' 1	2.1000' 1	1	2	6.0000' 1

omkostningsminimering sag 7.29, side 5

rhs ranging:

række	aktuel	nedre	variabel	øvre	variabel
	værdi	grænse	ind	grænse	ind
RAA1	2.000' 2	1.9500' 2	0	RAA1	ubegrænset
RAA2	2.100' 2	6.7500' 1	0	RAA2	ubegrænset
VARE1	5.000' 1	0.0000' 0	1	VARE2	5.3333' 1
VARE2	3.000' 1	ubegrænset	0	0	6.7500' 1
VARE3	6.000' 1	2.5000' 1	1	3	6.2500' 1

4. Kørselsvejledning

Programmet indeholder ingen programmerings- eller maskinemæssige restriktioner til antal variable og betingelsesligninger, idet man ved et højt antal af disse kan overgaa fra en ferritlager-version til en baggrundslagerversion. I praksis er der dog en grænse for, hvor store problemer, der kan løses.

Ferritlagerversionens pladsbehov er $14.000 + 25*m + 10*n + 8*m*n$ bytes, hvor n er antal variable og m antal betingelsesligninger. I øvrigt kræver programmet ingen ekstra ressourcer.

Med hensyn til køretid afhænger det noget af problemets størrelse og art. Det kan nævnes, at en opgave med $m = 64$ og $n = 30$ har kørt paa ca. 4 min og dets duale paa ca. 1 min.

Eks paa boss2-jobtilmelding

```
job po 1 989903 size 20000 temp disc 500 time 2 00 load trf data
resud=set 100 disc      ; uddata omraade
o resud
lppro data              ; kald af program
o c
convert resud           ; udskrift af uddata
finis
```

5. Litteratur

- [1] Bit 4 (1964) side 189-196
contribution no. 10.
Linear programming by the modified simplex method.
Author: Harald Josefsen

- [2] Bit 6 (1966) side 82.
Certification of contribution no. 10 Bit 4 1964.
Author: Bengt Asker.

- [3] Bit 12 (1972) side 267-271.
Certification of contribution no. 10 Bit 4 1964.
Author: A.C. Mekay.

- [4] Dantzig, G.B., Linear Programming and Extensions.
Princeton University Press 1963.

- [5] Hadley, G. Linear Programming.
Addison - Wesley, 1962,

- [6] Baumol, W.J., Economic Theory and Operations Analysis.
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.